Una técnica para la estimación de umbrales de percolación en sistemas de redes: Aplicación a un problema de flujo granular a través de un orificio

A. A. Torres[1], R. Caitano[2], and A. J. Ramirez-Pastor[1]

[1]Departamento de Física, Instituto de Física Aplicada, Universidad Nacional de San Luis-CONICET, Ejército de Los Andes 950, D5700BWS San Luis, Argentina

[2]Departamento de Física y Mat. Apl., Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra, E-31080 Pamplona, Spain

Desde su introducción en la década de 1950 propuesta por Hammersley y Broadbent, el problema de la percolación ha sido de gran interés en la física estadística y de la materia condensada. Aunque se originó en el estudio del flujo de fluidos en medios porosos, la percolación se ha aplicado a diversos campos científicos donde la conectividad y la agrupación son importantes. En este estudio, se propone una nueva técnica, en la cual llamamos de *Multiple Effective Thresholds* (MET), para estimar umbrales de percolación en sistemas de redes [1]. Esta técnica complementa el método de Yonezawa, Sakamoto y Hori (YSH), y permite una determinación precisa de los umbrales de percolación en el límite termodinámico sin requerir conocimiento completo de las funciones de probabilidad. Se validó la técnica mediante el análisis de percolación en redes cuadradas y se aplicó al análisis de transiciones de obstrucción en un silo bidimensional con la base vibrada. Con el cual se describe la transición entre un estado atascado y un estado desatascado. El sistema experimental se describe y analiza en [2].

El método YSH se basa en la definición de las probabilidades $R_L^X(p)$ para encontrar un cluster de percolación de tipo X en una rede finita de tamaño L [X puede ser horizontal (H), vertical (V), promedio (A), intersección (I) o unión (U)]. Las funciones $R_L^X(p)$ se obtienen mediante simulación. A continuación, los umbrales efectivos de percolación $p_c^X(L)$ se calculan a partir de las posiciones de los puntos de inflexión de las funciones de probabilidad (ver Fig. 1). Una vez que se determinan estos valores para varios tamaños de rede, se puede realizar un análisis de escalamiento para calcular el umbral de percolación en el límite termodinámico $p_c^X(\infty)$:

$$p_c^X(L) = p_c^X(\infty) + A^X L^{-1/\nu}, \;\; X \equiv \{U, I, A\} \qquad (1)$$

donde A^X es una constante no universal y ν es el exponente crítico de la longitud de correlación, que se muestra analíticamente igual a $\nu = 4/3$ en el caso de percolación aleatoria.

Con el método MET, se pueden obtener múltiples umbrales efectivos $p_c^{X,r}(L)$ para cada criterio X a partir de la condición $R_L^X(p) = r$, donde r es un parámetro que varía entre 0 y 1 (ver Fig. 1). Los valores resultantes $p_c^{X,r}(L)$ siguen la conocida ley de escalamiento en la ecuación 2.

$$p_c^{X,r}(L) = p_c^{X,r}(\infty) + A^{X,r} L^{-1/\nu}, \;\; X \equiv \{U, I, A\} \quad (2)$$

Los valores de $p_c^{X,r}(\infty)$ obtenidos a partir de las extrapolaciones dadas por la ecuación 2 permiten una determinación muy precisa del umbral de percolación en el límite termodinámico.

El método MET se aplicó a un conjunto de series temporales obtenidas de los experimentos estudiados en [2]. Estas series se caracterizan por los tiempos de obstrucción y flujo, para diferentes, niveles de vibración y tamaños de orificios.

A través de este análisis, hemos demostrado que la transición de fase observada en el sistema granular puede ser comprendida en términos de la transición de fase de percolación. En el régimen de obstrucción, el paso de partículas a través del orificio de descarga se caracteriza por períodos cortos de flujo interrumpidos por obstrucciones. Esto se traduce en la existencia de pequeños grupos finitos desconectados entre sí (región no percolante). En contraste, en el régimen de desobstrucción se observa un flujo continuo de material, similar a la existencia de un grupo percolante que conecta las regiones extremas del sistema (región percolante). Los resultados demuestran la eficacia de esta nueva técnica para calcular umbrales de percolación en diferentes escenarios, indicando que el método MET es una herramienta útil tanto para sistemas estructurados como para sistemas reales con información limitada.

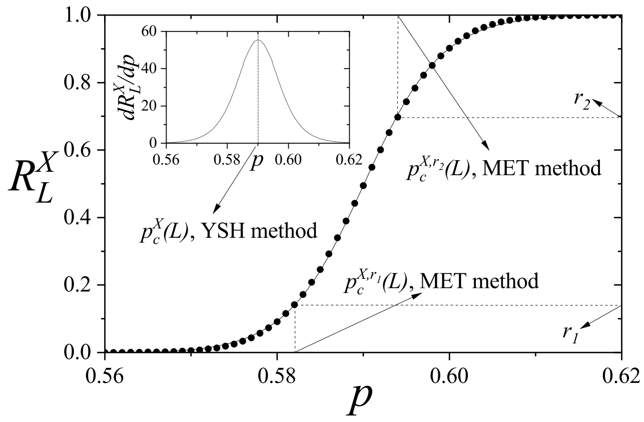

Fig. 1. Curva típica de $R_L^X(p)$ para una red finita de tamaño lineal L. Los símbolos y la línea representan los datos de simulación y la curva de ajuste (utilizando la función de error), respectivamente. A partir de la condición dada por $R_L^X(p) = r(0 \leq r \leq 1)$, se pueden obtener múltiples umbrales efectivos $p_c^{X,r}(L)$ (método MET). El inserto en la figura ilustra el cálculo del umbral efectivo a partir del punto de inflexión en $dR_L^X(p)/dp$ (método YSH).

[1] A. A. Torres, R. Caitano and A. J. Ramires-Pastor *A Technique for the Estimation of Percolation Thresholds in Lattice Systems: Application to a Problem of Granular Flow Through an Orifice.* Available at SSRN: `https://ssrn.com/abstract=4415862` or `http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4415862` (2023).

[2] R. Caitano, B. V. Guerrero, R. E. R. González, I. Zuriguel, and A. Garcimartn, *Characterization of the Clogging Transition in Vibrated Granular Media*, Phys. Rev. Lett. **127**, 148002 (2021).